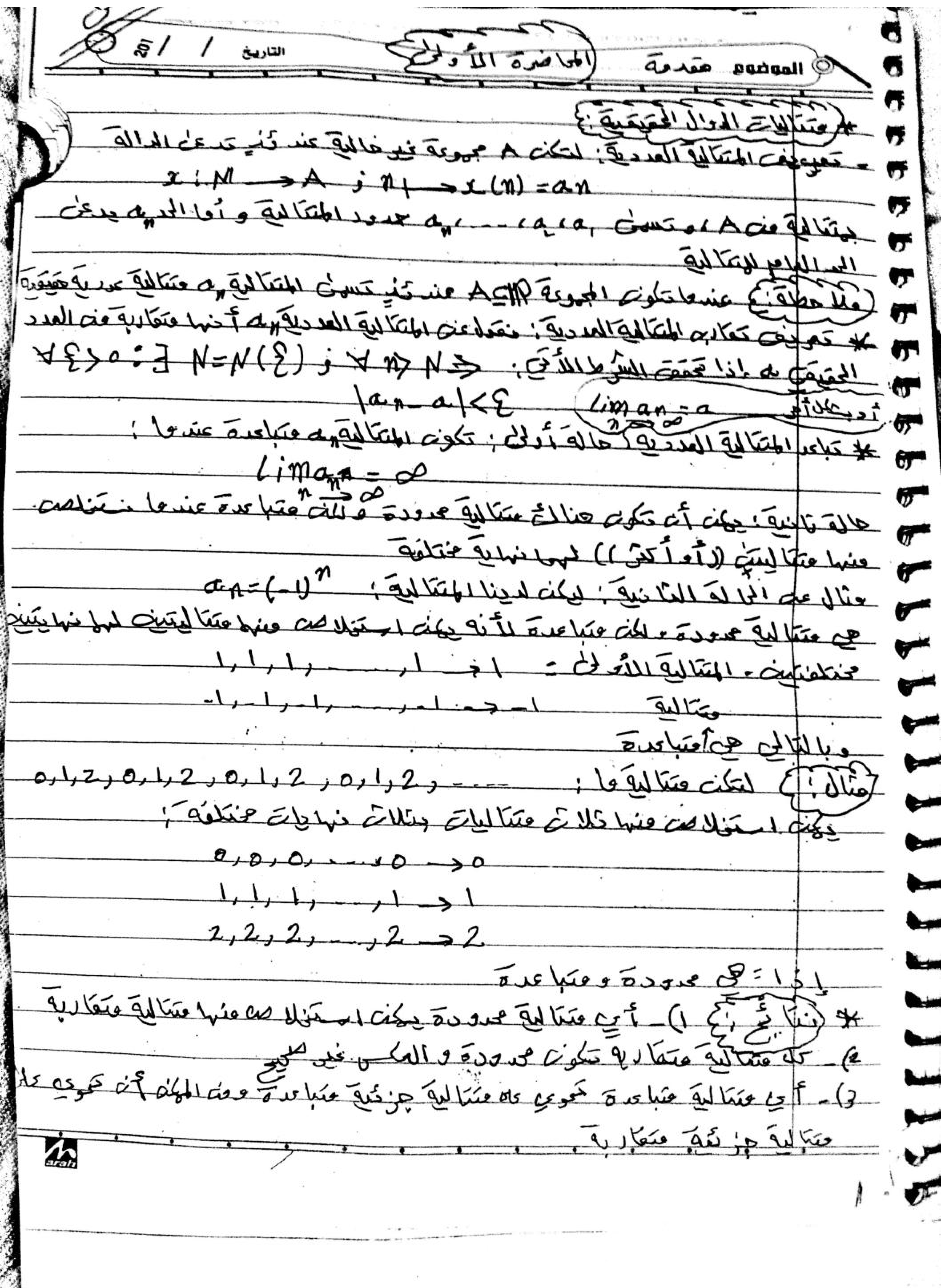


* متتاليات الدوال الحقيقية:

- تعريف المتتالية العددية: لتكن A مجموعة غير خالية عندئذٍ تدعى الدالة

$x : \mathbb{N} \to A \; ; \; n \mapsto x(n) = a_n$

بمتتالية من A وتسمى $a_1, a_2, \ldots, a_n$ حدود المتتالية و a_n [illegible] يدعى الحد العام للمتتالية

ملاحظة: عندما تكون المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ عندئذٍ تسمى المتتالية a_n متتالية عددية حقيقية

* تعريف تقارب المتتالية العددية: نقول عن المتتالية العددية a_n أنها متقاربة من العدد الحقيقي a إذا تحقق الشرط الآتي:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) \; ; \; \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

ونعبر عن ذلك بـ $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

* تباعد المتتالية العددية: حالة أولى: تكون المتتالية a_n متباعدة عندما:

$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

حالة ثانية: يمكن أن تكون هناك متتالية محدودة ولكن متباعدة عندما نستخلص منها متتاليتين (أو أكثر) لهما نهاية مختلفة

مثال عن الحالة الثانية: ليكن لدينا المتتالية: $a_n = (-1)^n$

هي متتالية محدودة ولكن متباعدة لأنه يمكن استخلاص منها متتاليتين لهما نهايتين مختلفتين. المتتالية الأولى: $1, 1, \ldots, 1 \to 1$

متتالية: $-1, -1, \ldots, -1 \to -1$

وبالتالي هي متباعدة

مثال: لتكن متتالية ما: $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots$

يمكن استخلاص منها ثلاث متتاليات بثلاث نهايات مختلفة:

$0, 0, 0, \ldots, 0 \to 0$

$1, 1, 1, \ldots, 1 \to 1$

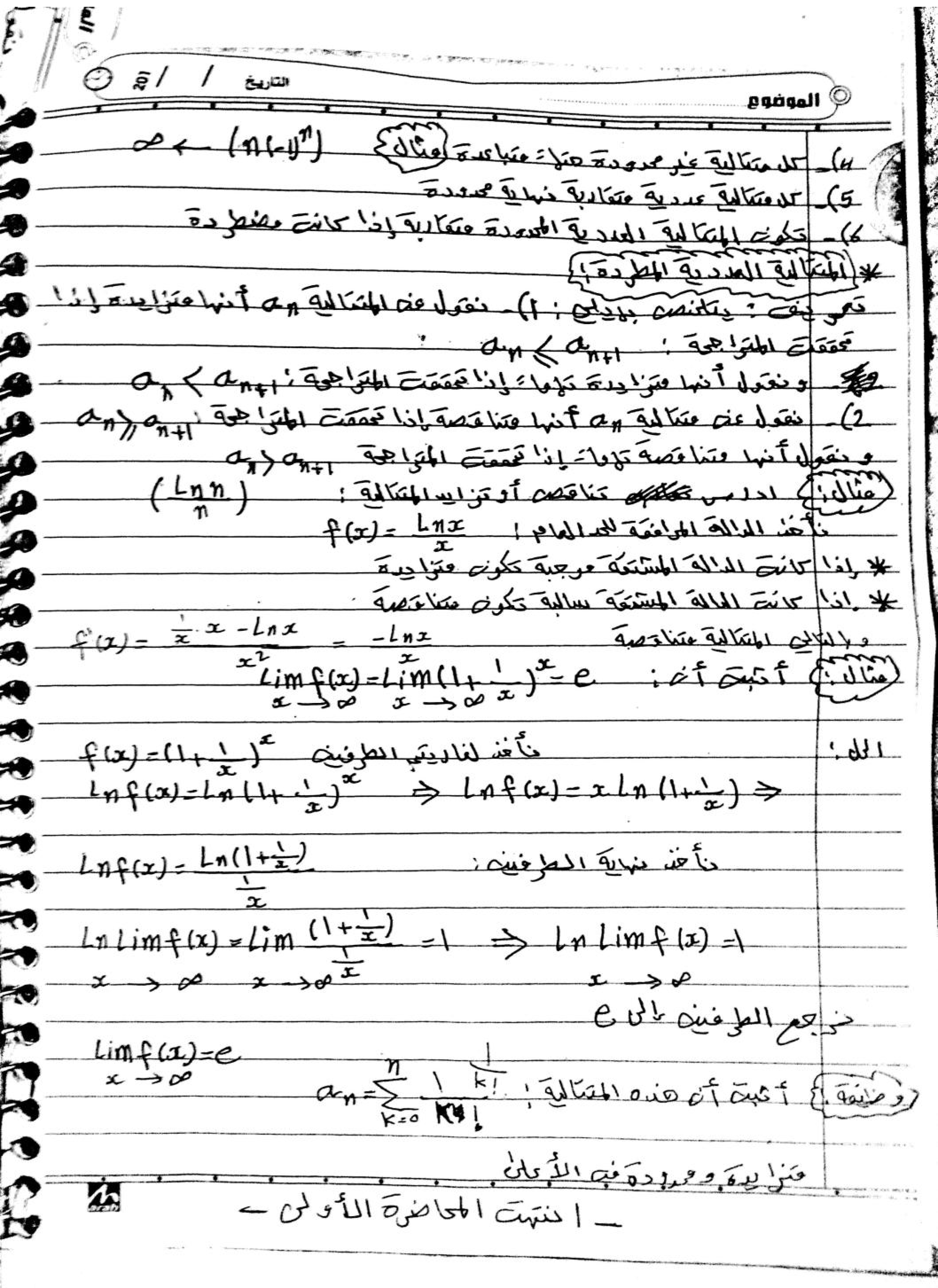
$2, 2, 2, \ldots, 2 \to 2$

إذاً: هي محدودة ومتباعدة

* نتائج: 1) أي متتالية محدودة يمكن استخلاص منها متتالية متقاربة

2) كل متتالية متقاربة تكون محدودة والعكس غير صحيح

3) أي متتالية متباعدة تحوي على متتالية جزئية متباعدة ومن الممكن أن تحوي على متتالية جزئية متقاربة



التاريخ / / 201

الموضوع

4)- كل متتالية غير محدودة هي متباعدة (مثال) $(n(-1)^n) \to \infty$

5)- كل متتالية عددية متقاربة تكون محدودة

6)- تكون المتتالية العددية المحدودة متقاربة إذا كانت مضطردة

* المتتالية العددية المطردة:

تعريف: يتلخص بما يلي: 1)- نقول عن المتتالية a_n أنها متزايدة إذا تحققت المتراجحة: $a_n \leq a_{n+1}$

- ونقول أنها متزايدة تماماً إذا تحققت المتراجحة: $a_n < a_{n+1}$

2)- نقول عن متتالية a_n أنها متناقصة إذا تحققت المتراجحة: $a_n \geq a_{n+1}$

ونقول أنها متناقصة تماماً إذا تحققت المتراجحة $a_n > a_{n+1}$

مثال: ادرس تناقص أو تزايد المتتالية: $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

نأخذ الدالة المرافقة للحد العام: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

* إذا كانت الدالة المشتقة موجبة تكون متزايدة

* إذا كانت الدالة المشتقة سالبة تكون متناقصة

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x}$ وبالتالي المتتالية متناقصة

مثال: أثبت أن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

الحل: نأخذ لغاريتم الطرفين $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\ln f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$

نأخذ نهاية الطرفين: $\ln f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$\ln\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \ln \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

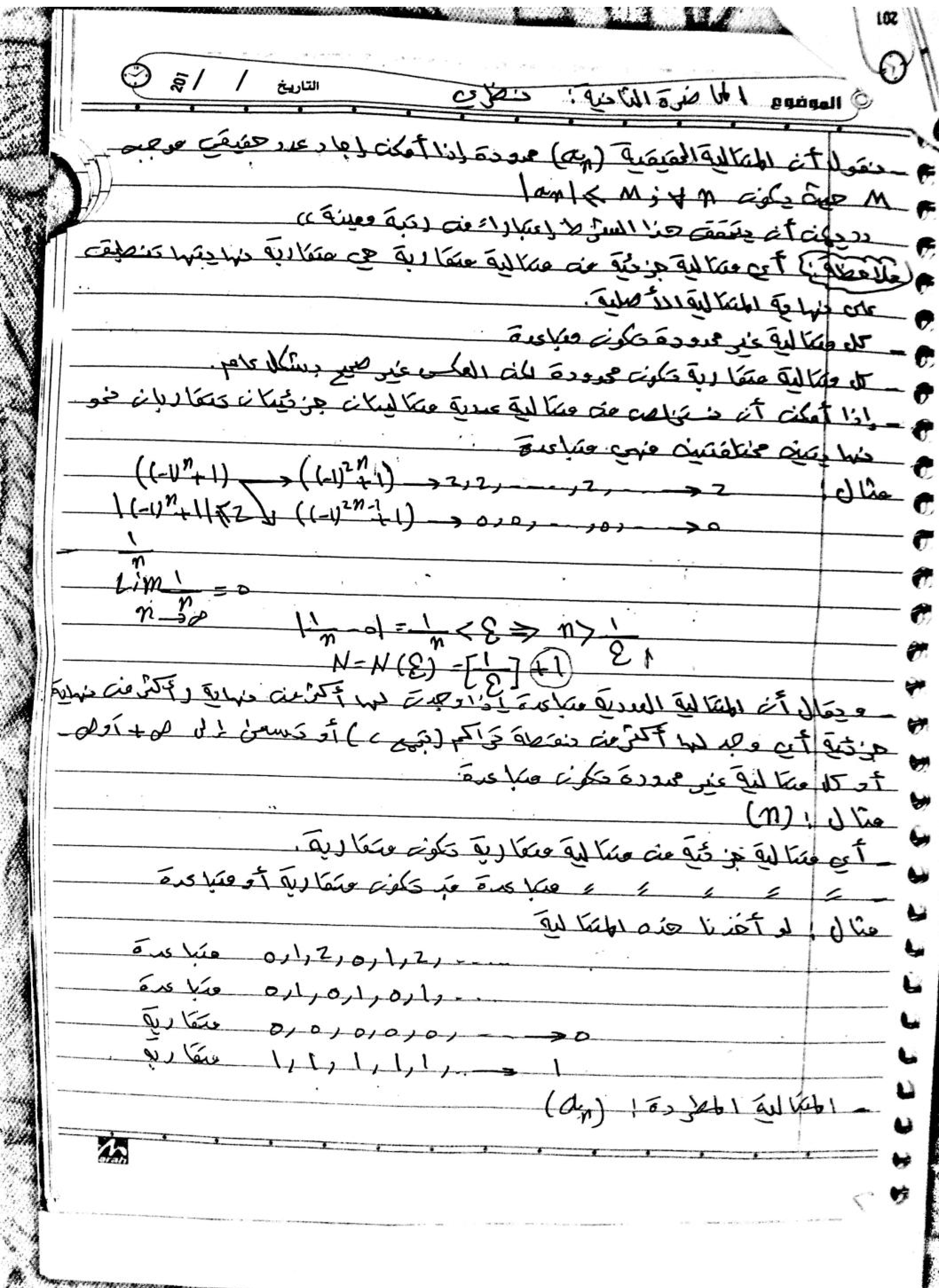
نرجع الطرفين إلى e

$\lim_{x\to\infty} f(x)=e$

وظيفة: أثبت أن هذه المتتالية: $a_n=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ متزايدة ومحدودة في الأعلى

— انتهت المحاضرة الأولى —

Scanned by CamScanner



الموضوع: المحاضرة الثانية: نظري — التاريخ / / 201

- نقول أن المتتالية الحقيقية (a_n) محدودة إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي موجب M حيث يكون $|a_n| \le M \ \forall n$

«ويمكن أن يتحقق هذا الشرط لاعتبارًا من رتبة معينة»

ملاحظة: أي متتالية جزئية من متتالية متقاربة هي متقاربة ونهايتها تنطبق على نهاية المتتالية الأصلية.

- كل متتالية غير محدودة تكون متباعدة
- كل متتالية متقاربة تكون محدودة لكن العكس غير صحيح بشكل عام.
- إذا أمكن أن نستخلص من متتالية عددية متتاليتان جزئيتان تتقاربان نحو نهايتين مختلفتين فهي متباعدة

مثال: $((-1)^n+1) \to ((-1)^{2n}+1) \to 2,2,\dots,2,\dots \to 2$

$|(-1)^n+1| \le 2$; $((-1)^{2n-1}+1) \to 0,0,\dots,0,\dots \to 0$

$\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

$N = N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$

- ويقال أن المتتالية العددية متباعدة إذا وجدت لها أكثر من نهاية وأكثر من نهاية جزئية أي وجد لها أكثر من نقطة تراكم (تجمع) أو تسعى إلى $+\infty$ أو $-\infty$

أي كل متتالية غير محدودة تكون متباعدة

مثال: (n)

- أي متتالية جزئية من متتالية متقاربة تكون متقاربة.
- " " " " متباعدة قد تكون متقاربة أو متباعدة

مثال: لو أخذنا هذه المتتالية

$0,1,2,0,1,2,\dots$ متباعدة

$0,1,0,1,0,1,\dots$ متباعدة

$0,0,0,0,0,\dots \to 0$ متقاربة

$1,1,1,1,1,\dots \to 1$ متقاربة

- المتتالية المطردة: (a_n)



التاريخ / / 201

الموضوع

متزايدة $a_{n+1} \geq a_n$ ، $a_{n+1} > a_n$ متزايدة تماما ؛

مثال :

$1,2,2,2,3,3,3,3,\ldots$ متزايدة

متناقصة $a_n \geq a_{n+1}$ ، $a_n > a_{n+1}$ متناقصة تماما ؛

ملاحظة : كل متتالية مضطردة تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة

- كل متتالية متزايدة محدودة من الأعلى و كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل تكون متقاربة .

- من كل متتالية محدودة يمكن استخلاص متتالية جزئية متقاربة واحدة على الأقل

مثال : لتكن المتتالية (a_n) التي حدها العام معطى بالصورة :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

الحل : نبرهن أنها متزايدة

$$a_{n+1} - a_n = \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right] - \left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right] = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

- $2^{k-1} < k! \quad \forall k > 2$

ولاحظ أن ; $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 3$

المتتالية (a_n) متزايدة و محدودة من الأعلى

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

- تعريف متتالية كوشي : كل متتالية كوشي في $\mathbb{R}$ تكون متقاربة والعكس صحيح

كل متتالية كوشي هي محدودة

* تعريف (متتالية كوشي - المتتالية الأساسية) : لتكن (a_n) متتالية عددية يقال أنها متتالية كوشي إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد :

$$N \in \mathbb{N};\ \forall m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Scanned by CamScanner